Математика ЕГЭ 2014
(система задач из открытого банка заданий)

Задания В5

Простейшие уравнения

Материалы подготовили:
Корянов А. Г. (г. Брянск); e-mail: akoryanov@mail.ru
Надежкина Н.В. (г. Иркутск); e-mail: nadezhkina@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ

Элементы содержания, проверяемые заданиями В5 по кодификатору:

2.1.1. Квадратные уравнения.
2.1.2. Рациональные уравнения.
2.1.3. Иррациональные уравнения.
2.1.4. Тригонометрические уравнения.
2.1.5. Показательные уравнения.
2.1.6. Логарифмические уравнения.
2.1.7. Равносильность уравнений.
2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.

Проверяемые требования (умения) в заданиях В5 по кодификатору:

2.1. Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения.

Введение

Данное пособие является пятым в серии пособий для подготовки к части В ЕГЭ по математике и посвящено решению несложного задания В5 Единого государственного экзамена по математике.

Для успешного решения этого задания необходимо уметь решать простейшие рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и помнить, что окончательную проверку ответа сделать **необходимо**, даже если сам процесс решения уравнения показался крайне простым. В 2012 году на ЕГЭ по математике аналогичное задание верно решили 79,5% выпускников. То есть 20,5% выпускников по разным причинам верного ответа не получили. В то же время следует заметить, что потеря балла при решении задания В5 критична для слабого ученика (обычно это задание включают в «самый необходимый минимум» подготовки на уровне «только чтобы сдать») и неприятна для сильного ученика (чтобы «восстановить» этот потерянный балл, нужно безукоризненно решить, например, тригонометрическое уравнение в С1 или показательное/логарифмическое неравенство в С3, что несравнимо сложнее, чем решить простейшее уравнение в В5).

Таким образом, к безукоризненному решению задания В5 учащихся необходимо подготовить. В качестве материала для подготовки к решению данного задания, на наш взгляд, логично и эффективно использование стройной и репрезентативной системы заданий на основе «открытого банка заданий» [4]. Данное пособие предлагает, на наш взгляд, именно такую систему заданий.

Чтобы пособие получилось по содержанию более полным, в него были добавлены некоторые типы уравнений, которые не представлены в «открытом банке заданий». По мнению авторов, эти дополнительные задания помогут сильным учащимся лучше подготовиться к решению задач части С. По этим же причинам был выделен раздел «Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля».

Структура пособия такова, что все уравнения, наряду с фиксированным номером из открытого банка заданий (он расположен в скобках непосредственно перед текстом задачи), имеют также собственную тройную нумерацию внутри пособия. Все типы уравнений систематизированы по содержанию и разделены на девять разделов. Каждый тип уравнений представлен пятью уравнениями (первое из этих пяти уравнений и есть прототип данного типа заданий), что позволяет учащемуся при необходимости неоднократно проверить себя, а учителю – использовать дополнительные задания в виде отдельных, уже готовых пяти вариантов для домашних или проверочных работ. Таким образом, первое число в тройной нумерации каждого уравнения означает номер раздела, второе число – номер типа уравнения внутри этого раздела, третье число – номер уравнения внутри типа (или номер варианта). Для первых уравнений каждого типа (прототипов) представлены подробные решения, для всех уравнений есть ответы.

Мы постарались сделать так, чтобы пособие было полезно и для ученика практически любого уровня подготовки, и для учителя, и для репетитора. Ответы и решения заданий-прототипов представлены в конце пособия отдельно для того, чтобы в конкретном экземпляре пособия можно было легко оставить только нужную форму ответов или решений для проверки либо самопроверки. Например, в экземплярах пособий, предлагаемых для уверенных в своих силах учеников, можно вообще убрать и ответы, и решения. Для менее уверенных в своих силах учащихся можно оставить только решения уравнений-прототипов. Для учителя и репетитора необходимы как раз ответы ко всем уравнениям для упрощения процесса проверки и оценки домашних и самостоятельных работ.

1. Линейные уравнения

Линейное уравнение с одной неизвестной x имеет вид $ax+b=0$ ($a\neq 0$) и приводится к виду $ax=-b$. Последнее уравнение имеет корень $x=\frac{-b}{a}$.

Пример 1. Решить уравнение $5(x+4)=3-2x$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$5x+20=3-2x;$$
$$5x+2x=3-20;$$
$$7x=-17;$$
$$x=\frac{-17}{7};$$
$$x=-2\frac{3}{7}.$$

Ответ: $-2\frac{3}{7}$.

***

1.1.1.(прототип 26662) Найдите корень уравнения: $\frac{4}{7}x=7\frac{3}{7}$.

1.1.2.(9705) Найдите корень уравнения: $\frac{2}{3}x=18\frac{2}{3}$.

1.1.3.(10053) Найдите корень уравнения: $-\frac{3}{8}x=-4\frac{1}{2}$.

1.1.4.(10139) Найдите корень уравнения: $-\frac{5}{8}x=-3\frac{3}{4}$.

1.1.5.(10143) Найдите корень уравнения: $-\frac{5}{6}x=-4\frac{1}{6}$.

***

1.2.1.(прототип 26663) Найдите корень уравнения: $-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$.

1.2.2.(9661) Найдите корень уравнения: $\frac{2}{5}x = -3\frac{3}{5}$.

1.2.3.(9627) Найдите корень уравнения: $-\frac{5}{8}x = 13\frac{3}{4}$.

1.2.4.(9845) Найдите корень уравнения: $\frac{3}{8}x = -7\frac{1}{2}$.

1.2.5.(10063) Найдите корень уравнения: $-\frac{7}{9}x = 17\frac{8}{9}$.

2. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – произвольные действительные числа, причем $a \neq 0$.

Для нахождения корней квадратного уравнения обычно используют формулу $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет кратный (двойной) действительный корень $\frac{-b}{2a}$. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Общая формула упрощается в случае, когда коэффициент b имеет вид $2k$. Корни квадратного уравнения $ax^2+2kx+c=0$ можно находить по формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Любое квадратное уравнение можно решить по общей формуле, но иногда применяют быстрые способы отыскания корней. Например, неполные квадратные уравнения обычно решаются методом разложения на множители левой части уравнения.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа m, n таковы, что $m+n=-p$, $m \cdot n = q$, то эти числа – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Для квадратного уравнения с целыми коэффициентами иногда находят один целый корень, а второй корень находят по теореме Виета. Для поиска целого корня испытывают целые делители свободного члена.

Если уравнение имеет дробные корни, то используют свойства коэффициентов или метод «перекидывания».

Свойства коэффициентов. 1. Пусть для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ выполняется равенство $a+b+c=0$, тогда уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Пусть для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ выполняется равенство $a-b+c=0$ или $a+c=b$, тогда уравнение имеет корни $x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Пример 2. Решить уравнения:
а) $x^2 = 9$; **б)** $x^2 = 0$; **в)** $x^2 = -9$; **г)** $x^2 = 3$;
д) $3x^2 + 2 = 0$; **е)** $100x^2 - 81 = 0$.

Решение. **а)** Так как $9 > 0$, то данное уравнение имеет два корня $x = \pm\sqrt{9}$ или $x = \pm 3$.

б) Данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

в) Так как $-9 < 0$, то исходное уравнение не имеет действительных корней.

г) Уравнение имеет два корня $x = \pm\sqrt{3}$.

д) Так как левая часть равнения принимает только положительные значения при $x \in R$, а правая часть – равна нулю, то данное уравнение не имеет действительных корней.

е) Преобразуем данное уравнение

$100x^2 = 81;\ x^2 = \frac{81}{100};\ x = \pm\frac{9}{10};\ x = \pm 0,9.$

Пример 3. Решить уравнения:

а) $(4x-8)(3x-7)=0;$ **б)** $4x^2 = 8x;$

в) $100x^2 - 81 = 0$.

Решение. **а)** Из условия равенства произведения множителей нулю имеем $4x-8=0$ или $3x-7=0$. Из каждого уравнения соответственно получаем $x=2$ или $x=\frac{7}{3}$.

б) Преобразуем данное уравнение $4x^2-8x=0;\ 4x(x-2)=0.$ Последнее уравнение имеет корни $x=0$ или $x=2$.

в) Разложим левую часть уравнения на множители, используя формулу разности квадратов:

$$(10x)^2 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (10x-9)(10x+9)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x-9=0, \\ 10x+9=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,9; \\ x=-0,9. \end{array}\right.$$

Пример 4. Решить уравнения:

а) $x^2-9x+14=0;$ **б)** $x^2+x-12=0$.

Решение. **а)** Нетрудно выбрать множители m и n в равенстве $m \cdot n = 14$, которые в сумме дают число 9, то есть $m+n=9$. Такими числами будут 2 и 7, которые являются корнями данного уравнения.

б) Так как $-4\cdot 3=-12$ и $-4+3=-1$, то числа -4 и 3 являются корнями исходного уравнения.

Пример 5. Решить уравнения:

а) $12x^2-7x+1=0$; **б)** $8q-16=q^2$;

в) $t-t^2-1=0$.

Решение. **а)** 1-*ый способ* (применение формулы). Вычислим дискриминант $D=(-7)^2-4\cdot 12\cdot 1=49-48=1.$ Далее используем формулу корней квадратного уравнения $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2\cdot 12}$. Отсюда имеем

$x_1=\frac{7-1}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ и $x_2=\frac{7+1}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

2-*ой способ* (метод «перекидывания»). Умножим все члены уравнения на первый коэффициент 12. Получим $144x^2-7\cdot 12x+12=0$. Введем новую переменную $12x=y$. Тогда уравнение примет вид $y^2-7y+12=0$, корни которого 3 и 4 легко найти, используя теорему, обратную теореме Виета. Решая два уравнения $12x=3$ и $12x=4$, получаем корни $x=\frac{1}{4}$ и $x=\frac{1}{3}$ соответственно.

б) Приведем данное уравнение к стандартному виду $q^2-8q+16=0.$ Так как дискриминант последнего уравнения $D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16=0$, то получаем один корень $\frac{8}{2}=4$.

Замечание. Аналогичный ответ можно получить сразу, без вычисления дискриминанта, просто «свернув» левую часть последнего уравнения в полный квадрат: $(q-4)^2=0;\ q-4=0;\ q=4.$

в) Приведем исходное уравнение к стандартному виду $t^2-t+1=0$. Так как дискриминант полученного уравнения $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $115x^2+1899x-2014=0;$

б) $1006x^2-1007x-2013=0.$

Решение. **а)** Так как сумма коэффициентов равна нулю $115+1899-2014=0,$ то данное уравнение имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-\frac{2014}{115}$.

б) Так как для коэффициентов выполняется равенство $1106+(-2013)=-1007,$ то данное уравнение имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=\frac{2013}{1006}$.

***

2.1.1.(прототип 77371) Решите уравнение: $\frac{1}{3}x^2=16\frac{1}{3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2.1.2.(100881) Решите уравнение: $\frac{2}{15}x^2=2\frac{7}{10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

2.1.3.(100985) Решите уравнение: $\frac{1}{9}x^2 = 21\frac{7}{9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

2.1.4.(101181) Решите уравнение: $\frac{5}{13}x^2 = 16\frac{1}{4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2.1.5.(101379) Решите уравнение: $\frac{6}{13}x^2 = 19\frac{1}{2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

***

2.2.1.(прототип 26667) Найдите корень уравнения: $x^2 - 17x + 72 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2.2.2.(38277) Найдите корень уравнения: $x^2 + 4x - 32 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

2.2.3.(12273) Найдите корень уравнения: $x^2 - 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2.2.4.(38557) Найдите корень уравнения: $x^2 + 7x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

2.2.5.(12393)Найдите корень уравнения: $2x^2 - 29x + 104 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2.2.6.(12483)Найдите корень уравнения: $2x^2 - 3x - 54 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2.2.7.(12553)Найдите корень уравнения: $4x^2 - 20x + 21 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

***

2.3.1.(прототип 77369) Решите уравнение: $(x-6)^2 = -24x$.

2.3.2.(100759) Решите уравнение: $(x+12)^2 = 48x$.

2.3.3.(100767) Решите уравнение: $(x-13)^2 = -52x$.

2.3.4.(100777) Решите уравнение: $(x+5)^2 = 20x$.

2.3.5.(100783) Решите уравнение: $(x-14)^2 = -56x$.

***

2.4.1.(прототип 77370) Решите уравнение: $x^2 + 9 = (x+9)^2$.

2.4.2.(100789) Решите уравнение: $x^2 - 8 = (x-4)^2$.

2.4.3.(100813) Решите уравнение: $x^2 + 11 = (x-1)^2$.

2.4.4.(100823) Решите уравнение: $x^2 + 15 = (x+5)^2$.

2.4.5.(100875) Решите уравнение: $x^2 - 15 = (x-3)^2$.

***

2.5.1.(прототип 77368) Решите уравнение: $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$.

2.5.2.(100259) Решите уравнение: $(x-4)^2 = (x+1)^2$.

2.5.3.(100265) Решите уравнение: $(5x-8)^2 = (5x-2)^2$.

2.5.4.(100737) Решите уравнение: $(3x-7)^2 = (3x+10)^2$.

2.5.5.(100741) Решите уравнение: $(6x+11)^2 = (6x+13)^2$.

3. Уравнения высшей степени

Уравнением высшей степени называют алгебраическое уравнение выше второй степени.

В силу строгой монотонности функции $y=t^{2k+1}$ на **R**, где $k\in N$, уравнение вида $f^{2k+1}(x)=g^{2k+1}(x)$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Уравнение вида $f^{2k}(x)=g^{2k}(x)$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f^k(x)=g^k(x), \\ f^k(x)=-g^k(x). \end{array}\right.$$

В частности, уравнение вида $f^{2k}(x)=a$, где число $a>0$, распадается на два уравнения $f(x)=\sqrt[2k]{a}$ и $f(x)=-\sqrt[2k]{a}$; при $a=0$ сводится к одному уравнению $f(x)=0$; при $a<0$ не имеет решений.

Пример 7. Решить уравнения:
а) $x^3=27$; **б)** $x^3=0$; **в)** $x^3=-27$;
г) $x^3=2$; **д)** $x^5=32$; **е)** $x^9=1$;
ж) $x^7=-128$.

Решение. **а)** Так как $x^3=3^3$, то $x=3$.
Замечание. Иногда уравнения данного вида решают, опираясь на строгую монотонность функции $y=\sqrt[2k+1]{t}$ на **R**, где $k\in N$: $x^3=27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x=3$. Так как $\sqrt[3]{x^3}=x$, то можно встретить такую запись: $x^3=27 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x=3$.

б) Имеем $x^3=0 \Leftrightarrow x^3=0^3 \Leftrightarrow x=0$.

в) $x^3=-27 \Leftrightarrow x^3=(-3)^3 \Leftrightarrow x=-3$.

г) $x^3=2 \Leftrightarrow x^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$.

д) $x^5=32 \Leftrightarrow x^5=2^5 \Leftrightarrow x=2$.

е) $x^9=1 \Leftrightarrow x^9=1^9 \Leftrightarrow x=1$.

ж) $x^7=-128 \Leftrightarrow x^7=(-2)^7 \Leftrightarrow x=-2$.

Пример 8. Решить уравнения:
а) $x^4=81$; **б)** $x^4=0$; **в)** $x^4=-81$;
г) $x^4=3$; **д)** $x^6=64$; **е)** $x^8=6561$.

Решение. **а)** Из данного уравнения получаем $x=\sqrt[4]{81}$ или $x=-\sqrt[4]{81}$, то есть $x=3$ или $x=-3$.

б) $x^4=0 \Leftrightarrow x=0$.

в) Так как левая часть уравнения $x^4\ge 0$ при всех $x\in R$, а правая – отрицательна, то данное уравнение не имеет решений.

г) $x^4=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[4]{3}, \\ x=-\sqrt[4]{3}. \end{array}\right.$

д) $x^6=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[6]{64}, \\ x=-\sqrt[6]{64}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$

е) $x^8=6561 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[8]{6561}, \\ x=-\sqrt[8]{6561}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Пример 9. Решить уравнения:
а) $x^6=(5x-4)^3$; **б)** $x^4=(5x-4)^2$.

Решение. **а)** Имеем

$$x^6=(5x-4)^3 \Leftrightarrow (x^2)^3=(5x-4)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=5x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4. \end{array}\right.$$

б) Из данного уравнения получаем

$$x^4=(5x-4)^2 \Leftrightarrow (x^2)^2=(5x-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=5x-4, \\ x^2=-(5x-4). \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0, \\ x^2+5x-4=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4, \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}. \end{array}\right.$$

***

3.1.1.(прототип 282849) Найдите корень уравнения $(x-1)^3=8$.

3.1.2.(283063) Найдите корень уравнения $(x+8)^5=243$.

3.1.3.(283083) Найдите корень уравнения $(x+2)^7=1$.

3.1.4.(283087) Найдите корень уравнения $(x+5)^9=512$.

3.1.5.(283127) Найдите корень уравнения $(x+3)^3=729$.

***

3.2.1.(прототип 282850) Найдите корень уравнения $(x-1)^3=-8$.

3.2.2.(283165) Найдите корень уравнения $(x-3)^3=-512$.

3.2.3.(283179) Найдите корень уравнения $(x-4)^5=-1$.

3.2.4.(283191) Найдите корень уравнения $x^3=-343$.

3.2.5.(283217) Найдите корень уравнения $(x+6)^7=-128$.

***

3.3.1. Найдите корень уравнения: $(x-1)^4=16$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

3.3.2. Найдите корень уравнения: $(x+5)^6=729$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

3.3.3. Найдите корень уравнения: $(x-3)^8=256$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

3.3.4. Найдите корень уравнения: $(x+7)^{10}=1024$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

3.3.5. Найдите корень уравнения: $(x+2)^4=625$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

4. Дробно-рациональные уравнения

Уравнение $f(x)=g(x)$ называется *рациональным*, если $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения. При этом если хотя бы одно из выражений $f(x)$ и $g(x)$ является дробным, то рациональное уравнение $f(x)=g(x)$ называется *дробным*.

Простейшее дробно-рациональное уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ многочлены, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

При решении дробно-рационального уравнения общего вида его либо приводят к простейшему виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, либо освобождаясь от знаменателя, приводят к целому рациональному уравнению.

Пример 10. Решить уравнения:

а) $\frac{x-3}{x}=0$; **б)** $\frac{x^2+x-2}{x-1}=0$;

в) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$.

Решение. **а)** Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-3=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

б) Имеем

$$\frac{x^2+x-2}{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x-1\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

в) Умножим обе части уравнения на $(x-2)(x+2)\neq 0$. Получим

$$x(x+2)-7(x-2)=8;$$

$$x^2+2x-7x+14-8=0;$$

$$x^2-5x+6=0.$$

Квадратное уравнение имеет корни 2 и 3. После проверки условия $(x-2)(x+2)\neq 0$ остается одно число 3, которое является корнем исходного уравнения.

Пример 11. Решить уравнения:

а) $x^{-2}=3$; **б)** $x^{-3}=27$.

Решение. **а)** Решаем уравнение $\frac{1}{x^2}=3$, из которого имеем $x^2=\frac{1}{3}$ или $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Последовательно получаем

$$x^{-3}=27 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}=27 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{27} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

***

4.1.1.(прототип 77383) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{9x-7}=\frac{1}{2}$.

4.1.2.(105901) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$.

4.1.3.(105991) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{2x-3}=\frac{1}{7}$.

4.1.4.(106193) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{10x-9}=\frac{1}{3}$.

4.1.5.(106383) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{8}$.

***

4.2.1.(прототип 77384) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1}=5$.

4.2.2.(106871) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{10x+10}=10$.

4.2.3.(106397) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{10x+6}=2$.

4.2.4.(106505) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{x+8}=4$.

4.2.5.(106691) Найдите корень уравнения: $\frac{1}{2x-6}=10$.

***

4.3.1.(прототип 26664) Найдите корень уравнения: $\frac{x-119}{x+7}=-5$.

4.3.2.(10155) Найдите корень уравнения: $\frac{x-41}{x-5}=3$.

4.3.3.(10163) Найдите корень уравнения: $\frac{x+36}{x-6}=-5$.

4.3.4.(10167) Найдите корень уравнения: $\frac{x+39}{x+7}=-3$.

4.3.5.(10507) Найдите корень уравнения: $\frac{x}{x+4}=5$.

***

4.4.1. (прототип 315119) Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4}=\frac{1}{4x-11}$.

4.4.2. (315335) Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-16}=\frac{1}{6x+18}$.

4.4.3. (315341) Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x+8}=\frac{1}{4x-19}$.

4.4.4. (315351) Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x+16}=\frac{1}{2x+8}$.

4.4.5. (315353) Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x-14}=\frac{1}{7x-19}$.

***

4.5.1.(прототип 77366) Решите уравнение $\frac{9}{x^2-16}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.5.2.(99623) Решите уравнение $\frac{4}{x^2-12}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

4.5.3.(99627) Решите уравнение $\frac{11}{x^2+7}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

4.5.4.(99639) Решите уравнение $\frac{10}{x^2+1}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.5.5.(99743) Решите уравнение $\frac{15}{x^2+6}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

***

4.6.1.(прототип 77367) Решите уравнение $\frac{13x}{2x^2-7}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

4.6.2.(99759) Решите уравнение $\frac{25x}{x^2+24}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.6.3.(99787) Решите уравнение $\frac{18x}{5x^2+13}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

4.6.4.(100195) Решите уравнение $\frac{x}{x^2-17}=4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

4.6.5.(100199) Решите уравнение $\frac{23x}{x^2-6}=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

***

4.7.1.(прототип 26665) Найдите корень уравнения: $x=\frac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

4.7.2.(10653) Найдите корень уравнения: $x=\frac{8x+36}{x+13}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

4.7.3.(10655) Найдите корень уравнения: $x=\frac{9x-20}{x+18}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

4.7.4.(10657) Найдите корень уравнения: $x=\frac{-4x-7}{x-12}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

4.7.5.(10659) Найдите корень уравнения: $x=\frac{-7x-15}{x+1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

***

4.8.1.(прототип 77372) Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.8.2.(101389) Решите уравнение $\frac{x-5}{2x-7}=\frac{x-5}{x-8}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.8.3.(101483) Решите уравнение $\frac{x-3}{7x+6}=\frac{x-3}{5x-12}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.8.4.(101681) Решите уравнение $\frac{x+6}{4x+7}=\frac{x+6}{2x-11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

4.8.5.(101873) Решите уравнение $\frac{x-1}{4x+11}=\frac{x-1}{x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Рассмотрим простейшие уравнения, которые содержат переменную или функцию этой переменной под знаком модуля.

Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x); \end{array}\right.$$

по-другому:

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2=|g(x)|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

Для уравнения вида $|f(x)|=g(x)$ имеем

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x), \end{array}\right. \\ g(x)\ge 0, \end{cases}$$

по-другому:

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

В частности, уравнение вида $|f(x)|=a$, где число $a>0$, распадается на два уравнения $f(x)=a$ и $f(x)=-a$; при $a=0$ сводится к одному уравнению $f(x)=0$; при $a<0$ не имеет решений.

Пример 12. Решить уравнения:
а) $|x|=4$; **б)** $|x|=0$; **в)** $|x|=-4$;
г) $|x-1|=5$.

Решение. **а)** По определению модуля имеем $x=-4$ или $x=4$.

б) По определению модуля имеем $x=0$.

в) Так как $|x|\ge 0$ для всех $x\in R$, то данное уравнение не имеет решений.

г) 1-*ый способ*. По определению модуля имеем два уравнения $x-1=-5$ или $x-1=5$, каждое из которых имеет решение $x=-4$ и $x=6$ соответственно.

2-*ой способ*. Запись $|x-1|$ есть расстояние от точки x до точки 1. Для решения данного уравнения необходимо на координатной оси найти такие точки, расстояние от которых до точки 1 равно 5. Справа от точки 1 расположена точка 6, а слева – точка (–4). Следовательно, данное уравнение имеет два корня –4 и 6.

Пример 13. Решить уравнения:
а) $|x+2|=|2x-1|$; **б)** $|x+5|=7-x$.

Решение. **а)** Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x+2=2x-1, \\ x+2=-(2x-1). \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x=-3, \\ 3x=-1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

б) Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+5=7-x, \\ x+5=-(7-x), \end{array}\right. \\ 7-x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 7-x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

***

5.1.1.Решите уравнение $|2x-3|=11$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5.1.2.Решите уравнение $|x^2-5x+4|=4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5.1.3.Решите уравнение $|4x-6|=8$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.1.4.Решите уравнение $|x^2-5x|=6$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.1.5.Решите уравнение $|3x+5|=17$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

***

5.2.1.Решите уравнение $|x+1|=|2-x|$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.2.2.Решите уравнение $|x-1|=|3x-7|$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5.2.3.Решите уравнение $|3x+7|=|2-2x|$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.2.4.Решите уравнение $|3-x|=|3-2x|$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5.2.5.Решите уравнение $|4-2x|=|x+3|$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

***

5.3.1. Решите уравнение $|3-6x|=4-2x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.3.2. Решите уравнение $|3x-1|=2+x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5.3.3. Решите уравнение $|x+3|=2x-1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.3.4. Решите уравнение $|2-x|=5-4x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5.3.5. Решите уравнение $|1-2x|-4x=-6$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональными называют уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня.

Выделим два вида простейших иррациональных уравнения, решение которых опирается на определение корня из числа.

Уравнение вида $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)$, где $k\in N$, равносильно уравнению $f(x)=g^{2k+1}(x)$.

Уравнение вида $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)$, где $k\in N$, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=g^{2k}(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Решение следующих двух уравнений опирается на свойство монотонной функции.

В силу строгой монотонности функции $y=\sqrt[2k+1]{t}$ на **R**, где $k\in N$, уравнение $\sqrt[2k+1]{f(x)}=\sqrt[2k+1]{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

В силу строгой монотонности функции $y=\sqrt[2k]{t}$ на множестве неотрицательных чисел, где $k\in N$, уравнение $\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

В силу условия равенства произведения нулю, уравнение $f(x)\cdot\sqrt[2k]{g(x)}=0$, где $k\in N$, равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Пример 14. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x}=3$; **б)** $\sqrt{x}=0$; **в)** $\sqrt{x}=-3$;

г) $\sqrt{-x}=3$; **д)** $\left(\sqrt{x}\right)^2=3$; **е)** $\sqrt{x^2}=3$;

ж) $\sqrt[4]{x}=3$; **з)** $\sqrt[6]{x}=2$.

Решение. **а)** $\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=3^2 \Leftrightarrow x=9$.

б) $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

в) Так как левая часть уравнения $\sqrt{x}\ge 0$ при всех неотрицательных значениях x, а правая – отрицательна, то данное уравнение не имеет решений.

г) $\sqrt{-x}=3 \Leftrightarrow -x=9 \Leftrightarrow x=-9$.

д) $\left(\sqrt{x}\right)^2=3 \Leftrightarrow x=3$.

е) $\sqrt{x^2}=3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

ж) $\sqrt[4]{x}=3 \Leftrightarrow x=3^4 \Leftrightarrow x=81$.

з) $\sqrt[6]{x}=2 \Leftrightarrow x=2^6 \Leftrightarrow x=64$.

Пример 15. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x}=3$; **б)** $\sqrt[3]{x}=0$; **в)** $\sqrt[3]{x}=-3$;

г) $\sqrt[3]{-x}=3$; **д)** $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=3$; **е)** $\sqrt[3]{x^3}=3$;

ж) $\sqrt[5]{x}=3$; **з)** $\sqrt[7]{x}=-2$.

Решение. **а)** $\sqrt[3]{x}=3 \Leftrightarrow x=3^3 \Leftrightarrow x=27$.

б) $\sqrt[3]{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

в) $\sqrt[3]{x}=-3 \Leftrightarrow x=(-3)^3 \Leftrightarrow x=-27$.

г) $\sqrt[3]{-x}=3 \Leftrightarrow -x=3^3 \Leftrightarrow x=-27$.

д) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=3 \Leftrightarrow x=3$.

е) $\sqrt[3]{x^3}=3 \Leftrightarrow x=3$.

ж) $\sqrt[5]{x}=3 \Leftrightarrow x=3^5 \Leftrightarrow x=243$.

з) $\sqrt[7]{x}=-2 \Leftrightarrow x=(-2)^7 \Leftrightarrow x=-128.$

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{3-2x}=-x.$$

Решение. 1-*ый способ*. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3-2x=x^2,\\ -x\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x-3=0,\\ x\le 0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение системы имеет корни –3 и 1, последний из которых не удовлетворяют условию $x\le 0$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень –3.

2-*ой способ*. Пусть $\sqrt{3-2x}=t$, где $t\ge 0$, тогда $3-2x=t^2$, $x=\dfrac{3-t^2}{2}$ и данноеуравнение примет следующий вид $t=-\dfrac{3-t^2}{2}$. Последнее уравнение приводится к уравнению $t^2-2t-3=0$, имеющему корни 3 и –1 (не удовлетворяет условию $t\ge 0$). Решаем уравнение $\sqrt{3-2x}=3$ и находим $x=-3$.

Пример 17. Решить уравнения:

а) $\sqrt[6]{2x^2-1}=\sqrt[6]{3x-2}$;

б) $\sqrt[3]{4x^2-11}=\sqrt[3]{13x+31}.$

Решение. **а)** $\sqrt[6]{2x^2-1}=\sqrt[6]{3x-2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-1=3x-2,\\ 3x-2\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x+1=0,\\ 3x-2\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-0,5,\end{array}\right.\\ 3x-2\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

б) $\sqrt[3]{4x^2-11}=\sqrt[3]{13x+31} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-11=13x+31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-13x-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=5,25.\end{array}\right.$$

Иногда при решении уравнений используют условия равенства произведения или дроби нулю.

Произведение двух выражений $f(x)\cdot g(x)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них равно нулю, а второе при этом определено.

Частное двух выражений $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ равно нулю тогда и только тогда, когда выражение в числителе равно нулю, а выражение в знаменателе при этом отлично от нуля.

Пример 18. Решить уравнения:

а) $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$;

б) $(x^2-9)\cdot\sqrt[3]{x-2}=0$.

Решение. **а)** $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$;

$$(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-4=0,\\ x+1=0,\end{array}\right.\\ x+1\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm 2,\\ x=-1,\end{array}\right.\\ x\ge -1.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

б) $(x^2-9)\cdot\sqrt[3]{x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-9=0,\\ x-2=0.\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 3,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Пример 19. Решить уравнения:

а) $x^{\frac{3}{2}}=5$; **б)** $x^{\frac{2}{3}}=5$.

Решение. **а)** Имеем

$$x^{\frac{3}{2}}=5 \Leftrightarrow \begin{cases}x^3=5^2,\\ x\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{25}.$$

б) $x^{\frac{2}{3}}=5 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=5^3,\\ x\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{125} \Leftrightarrow x=5\sqrt{5}.$$

***

6.1.1.(прототип 27465) Найдите корень уравнения: $\sqrt{3x-8}=5$.

6.1.2.(3047) Найдите корень уравнения: $\sqrt{6x+57}=9$.

6.1.3.(3065) Найдите корень уравнения: $\sqrt{2x+9}=11$.

6.1.4.(11155) Найдите корень уравнения: $\sqrt{53+2x}=7$.

6.1.5.(11157) Найдите корень уравнения: $\sqrt{69+5x}=8$.

***

6.2.1.(прототип 26656) Найдите корень уравнения: $\sqrt{15-2x}=3$.

6.2.2.(2999) Найдите корень уравнения: $\sqrt{55-3x}=7$.

6.2.3.(3001) Найдите корень уравнения: $\sqrt{30-7x}=4$.

6.2.4.(11559) Найдите корень уравнения: $\sqrt{-29-9x}=5$.

6.2.5.(11599) Найдите корень уравнения: $\sqrt{-6-6x}=6$.

***

6.3.1.(прототип 27466) Найдите корень уравнения: $\sqrt[3]{x-4}=3$.

6.3.2.(27471) Найдите корень уравнения: $\sqrt[5]{x-3}=-2$.

6.3.3.(38897) Найдите корень уравнения: $\sqrt[3]{x-8}=5$.

6.3.4.(38993) Найдите корень уравнения: $\sqrt[3]{x+5}=7$.

6.3.5.(39003) Найдите корень уравнения: $\sqrt[3]{x-10}=6$.

***

6.4.1.(прототип 26661) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5$.

6.4.2.(3333) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{7x+28}{18}}=7$.

6.4.3.(3337) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{4x+40}{17}}=4$.

6.4.4.(3343) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{2x+51}{15}}=9$.

6.4.5.(3379) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{5x+26}{6}}=6$.

***

6.5.1.(прототип 26660) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7}$.

6.5.2.(3285) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{3}{5x-30}}=\dfrac{1}{5}$.

6.5.3.(3289) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{2}{7x-31}}=\dfrac{1}{4}$.

6.5.4.(3291) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{18}{2x-52}}=\dfrac{1}{8}$.

6.5.5.(3293) Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{20}{3x-13}}=\dfrac{1}{2}$.

***

6.6.1.(прототип 77374) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{5-2x}}=\dfrac{1}{3}$.

6.6.2.(102381) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{5}{20-6x}}=\dfrac{1}{10}$.

6.6.3.(102481) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{17-x}}=\dfrac{1}{14}$.

6.6.4.(102691) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2}{15-5x}}=\dfrac{1}{15}$.

6.6.5.(102867) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2}{1-7x}}=\dfrac{1}{5}$.

***

6.7.1.(прототип 77373) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{15-4x}}=0,2$.

6.7.2.(101889) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{5}{6-x}}=0,5$.

6.7.3.(101979) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{20-x}}=1$.

6.7.4.(102189) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{5}{17-x}}=0,1$.

6.7.5.(102377) Решите уравнение $\sqrt{\frac{3}{19-2x}}=0,2$.

***

6.8.1.(прототип 77375) Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

6.8.2.(102883) Решите уравнение $\sqrt{-35+12x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

6.8.3.(102979) Решите уравнение $\sqrt{54-3x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

6.8.4.(103017) Решите уравнение $\sqrt{27+6x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

6.8.5.(103023) Решите уравнение $\sqrt{-3+4x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

***

6.9.1.(прототип 26668) Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.9.2.(12563) Найдите корень уравнения: $\sqrt{-63-16x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.9.3.(12565) Найдите корень уравнения: $\sqrt{-56-15x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.9.4.(12603) Найдите корень уравнения: $\sqrt{9-8x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.9.5.(12667) Найдите корень уравнения: $\sqrt{20+x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

***

6.10.1. Найдите корень уравнения: $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.10.2. Найдите корень уравнения: $\sqrt{8-x^2}=\sqrt{x+2}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6.10.3. Найдите корень уравнения: $\sqrt{1+4x-x^2}=\sqrt{x^2+5x}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.10.4. Найдите корень уравнения: $\sqrt{4x^2-4x+2}=\sqrt{1+x-2x^2}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6.10.5. Найдите корень уравнения: $\sqrt{3x}=\sqrt{x^2-18}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

***

6.11.1. Найдите корень уравнения: $(x^2-1)\cdot\sqrt{2x+1}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.11.2. Найдите корень уравнения: $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наибольший из них.

6.11.3. Найдите корень уравнения: $(x^2+5x)\cdot\sqrt{x-3}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6.11.4. Найдите корень уравнения: $\sqrt{7-x^2}\cdot\sqrt{10-3x-x^2}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наибольший из них.

6.11.5. Найдите корень уравнения: $(x^2+x)\cdot\sqrt{x-1}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Показательные уравнения

Показательными называют уравнения, содержащие неизвестную только в показателе степени.

В силу монотонности показательной функции $y = a^t$, где $a > 0; a \neq 1$, уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Краткая запись

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Отсюда следует, что при решении простейших показательных уравнений удобно представить обе части уравнения как степени одного и того же числа.

Пример 20. Решить уравнения:

а) $5^x = 5^3$; **б)** $5^x = 25$; **в)** $5^x = \frac{1}{5}$;

г) $5^x = \sqrt{5}$; **д)** $5^x = 1$; **е)** $5^x = 4$;

ж) $5^x = 0$; **з)** $5^x = -5$; **и)** $5^x = 7^x$.

Решение. **а)** $5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.

б) $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$.

в) $5^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

г) $5^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{0,5} \Leftrightarrow x = 0,5$.

д) $5^x = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$.

е) $5^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_5 4$.

ж) Так как $5^x > 0$ при всех значениях $x \in R$, то данное уравнение не имеет решений.

з) Данное уравнение не имеет корней, так как $5^x > 0$ при всех значениях $x \in R$.

и) Имеем

$$5^x = 7^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{7^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^x = \left(\frac{5}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

***

7.1.1.(прототип 26666) Найдите корень уравнения: $9^{-5+x} = 729$.

7.1.2.(11677) Найдите корень уравнения: $4^{1+x} = 64$.

7.1.3.(12075) Найдите корень уравнения: $7^{-5+x} = 343$.

7.1.4.(12121) Найдите корень уравнения: $6^{5+x} = 216$.

7.1.5.(12127) Найдите корень уравнения: $8^{-1+x} = 512$.

***

7.2.1.(прототип 26650) Найдите корень уравнения: $2^{4-2x} = 64$.

7.2.2.(12101) Найдите корень уравнения: $6^{-4-x} = 6$.

7.2.3.(12039) Найдите корень уравнения: $7^{-5-x} = 49$.

7.2.4.(2763) Найдите корень уравнения: $5^{1-2x} = 125$.

7.2.5.(2757) Найдите корень уравнения: $3^{3-x} = 81$.

***

7.3.1.(прототип 77378) Решите уравнение $8^{9-x} = 64^x$.

7.3.2.(104025) Решите уравнение $9^{6+x} = 81^{2x}$.

7.3.3.(104051) Решите уравнение $6^{5+2x} = 36^{3x}$.

7.3.4.(104069) Решите уравнение $5^{3-2x} = 125^x$.

7.3.5.(104187) Решите уравнение $2^{7+2x} = 8^{3x}$.

***

7.4.1.(прототип 26652) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$.

7.4.2.(2821) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-15} = \frac{1}{64}$.

7.4.3.(2825) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-14} = \frac{1}{64}$.

7.4.4.(2835) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-6} = \frac{1}{36}$.

7.4.5.(2855) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-3} = \frac{1}{49}$.

***

7.5.1.(прототип 26651) Найдите корень уравнения: $5^{x-7}=\frac{1}{125}$.

7.5.2.(2779) Найдите корень уравнения: $3^{x-18}=\frac{1}{9}$.

7.5.3.(2781) Найдите корень уравнения: $6^{4x-10}=\frac{1}{36}$.

7.5.4.(2783) Найдите корень уравнения: $2^{4x-19}=\frac{1}{8}$.

7.5.5.(2807) Найдите корень уравнения: $7^{3x-14}=\frac{1}{49}$.

***

7.6.1. Найдите корень уравнения: $5^{x+5}=0{,}04$.

7.6.2. Найдите корень уравнения: $10^{x-3}=0{,}01$.

7.6.3. Найдите корень уравнения: $2^{x+2}=0{,}125$.

7.6.4. Найдите корень уравнения: $2^{5-x}=0{,}25$.

7.6.5. Найдите корень уравнения: $20^{3-x}=0{,}05$.

***

7.7.1.(прототип 26670) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x}=512$.

7.7.2.(13383) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+x}=64$.

7.7.3.(13447) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4+x}=125$.

7.7.4.(13389) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2+x}=27$.

7.7.5.(13687) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}=729$.

***

7.8.1.(прототип 26653) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x}=4$.

7.8.2.(2861) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2x}=9$.

7.8.3.(2865) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{13-5x}=16$.

7.8.4.(2875) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{5}\right)^{11-x}=125$.

7.8.5.(13657) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-5-x}=512$.

***

7.9.1.(прототип 26671) Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}=2^x$.

7.9.2.(13753) Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}=27^x$.

7.9.3.(13799) Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}=256^x$.

7.9.4.(13843) Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-6}=125^x$.

7.9.5.(13949) Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}=343^x$.

***

7.10.1.(прототип 26655) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3$.

7.10.2.(2951) Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{32}\right)^{x-6}=2$.

7.10.3.(2953) Найдите корень уравнения:
$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-9}=2$.

7.10.4.(2955) Найдите корень уравнения:
$\left(\frac{1}{36}\right)^{x-8}=6$.

7.10.5.(2967) Найдите корень уравнения:
$\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}=5$.

***

7.11.1.(прототип 26654) Найдите корень уравнения: $16^{x-9}=\frac{1}{2}$.

7.11.2.(2901) Найдите корень уравнения:
$4^{x-15}=\frac{1}{2}$.

7.11.3.(2903) Найдите корень уравнения:
$9^{x-2}=\frac{1}{3}$.

7.11.4.(2905) Найдите корень уравнения:
$36^{x-7}=\frac{1}{6}$.

7.11.5.(2923) Найдите корень уравнения:
$49^{x-4}=\frac{1}{7}$.

***

7.12.1.(прототип 77379) Решите уравнение $2^{3+x}=0,4\cdot5^{3+x}$.

7.12.2.(104199) Решите уравнение
$6^{2-5x}=0,6\cdot10^{2-5x}$.

7.12.3.(104297) Решите уравнение
$5^{2-3x}=6,25\cdot2^{2-3x}$.

7.12.4.(104503) Решите уравнение
$2^{4-x}=0,04\cdot10^{4-x}$.

7.12.5.(104677) Решите уравнение
$9^{3-x}=3,24\cdot5^{3-x}$.

8. Логарифмические уравнения

Логарифмическими называют уравнения, содержащие неизвестную под знаком логарифма или в основании логарифма (или и там, и там одновременно).

Заметим, что при решении логарифмических уравнений необходимо учитывать ограничения на неизвестную: под знаком логарифма могут находиться только положительные значения выражений, в основании логарифмов – только положительные значения выражений, отличные от единицы.

Выделим два вида простейших логарифмических уравнений, решение которых соответственно опирается на определение логарифма или свойство монотонности логарифмической функции.

Использование определения логарифма

Простейшее логарифмическое уравнение вида $\log_a x=c$, где $a>0; a\neq1$, имеет решение $x=a^b$. Уравнение вида $\log_x b=c$ приводится к уравнению $x^c=b.$

Пример 21. Решить уравнения:
а) $\log_2 x=-3$; **б)** $\lg(2x-1)=0$;
в) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_2\frac{1}{16}$;
г) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+4x-5\right)=-4$;
д) $\log_{0,2}(x+1)+\log_{0,2}7=-2$;
е) $\log_2\log_5 x=1$; **ж)** $\lg^2 x=4$.

Решение. **а)** По определению логарифма имеем $\log_2 x=-3\Leftrightarrow x=2^{-3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}.$

б) По определению логарифма
$$\lg(2x-1)=0\Leftrightarrow 2x-1=10^0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1.$$

в) Преобразуем уравнение
$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_2\frac{1}{16};$$
$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=-4;$$
$$x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4};$$
$$x+2=81;$$
$$x=79.$$

г) Из данного уравнения по определению логарифма получаем равносильное уравнение $x^2+4x-5=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $x^2+4x-5=16;$

$x^2+4x-21=0$. Последнее уравнение имеет корни –7 и 3.

д) Для данного уравнения имеем равносильные преобразования

$$\log_{0,2}(7x+7)=-2;$$

$$7x+7=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2};$$

$$7x+7=25;$$

$$x=\frac{18}{7}.$$

е) Используем два раза определение логарифма

$$\log_5 x=2^1; \log_5 x=2; x=5^2; x=25.$$

ж) Данное уравнение распадается на два уравнения $\lg x=2$ или $\lg x=-2$. По определению логарифма из каждого уравнения получаем $x=100$ и $x=0,01$ соответственно.

Пример 22. Решить уравнения:

а) $\log_x 27=3$; **б)** $\log_x 81=2$.

Решение. **а)** Данное уравнение равносильно системе

$$\log_x 27=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=27, \\ x>0; x\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

б) Имеем

$$\log_x 81=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=81, \\ x>0; x\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 9, \\ x>0; x\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Пример 23. Решить уравнение

$$\log_{11}(19-x)=\log_{13}(19-x).$$

Решение. Пусть $\log_{11}(19-x)=a$ и $\log_{13}(19-x)=a$, тогда $19-x=11^a$ и $19-x=13^a$. Получаем уравнение $11^a=13^a$, которое имеет единственный корень (см. пример 20 и)) $a=0$. Значит, получаем уравнение $19-x=11^0$ или $19-x=1$. Отсюда $x=18$.

***

8.1.1.(прототип 26647) Найдите корень уравнения: $\log_5(4+x)=2$.

8.1.2.(2639) Найдите корень уравнения: $\log_3(9+x)=4$.

8.1.3.(14195) Найдите корень уравнения: $\log_2(-5+x)=1$.

8.1.4.(14593) Найдите корень уравнения: $\log_6(5+x)=3$.

8.1.5.(14673) Найдите корень уравнения: $\log_9(-4+x)=3$.

***

8.2.1.(прототип 26646) Найдите корень уравнения: $\log_2(4-x)=7$.

8.2.2.(2657) Найдите корень уравнения: $\log_6(3-x)=2$.

8.2.3.(14213) Найдите корень уравнения: $\log_7(-1-x)=3$.

8.2.4.(14651) Найдите корень уравнения: $\log_3(-4-x)=1$.

8.2.5.(14669) Найдите корень уравнения: $\log_5(5-x)=2$.

***

8.3.1.(прототип 26658) Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.

8.3.2.(3191) Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{8}}(13-x)=-2$.

8.3.3.(3193) Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{4}}(9-5x)=-3$.

8.3.4.(3205) Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{3}}(6-5x)=-4$.

8.3.5.(3215)Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{2}}(6-x)=-5$.

***

8.4.1. Найдите корень уравнения: $\log_2(5-x)=-3$.

8.4.2. Найдите корень уравнения: $\log_{25}(10-x)=-1$.

8.4.3. Найдите корень уравнения: $\log_4(8-x)=-2$.

8.4.4. Найдите корень уравнения: $\log_5(6-x)=-2$.

8.4.5. Найдите корень уравнения: $\lg(2-x)=-3$.

***

8.5.1. Найдите корень уравнения: $\log_{25}(2-3x)=0,5$.

8.5.2. Найдите корень уравнения: $\log_4(1-2x)=1,5$.

8.5.3. Найдите корень уравнения: $\log_9(x-3)=2,5$.

8.5.4. Найдите корень уравнения: $\log_{0,25}(6-x)=1,5$.

8.5.5. Найдите корень уравнения: $\log_{0,04}(3x-1,9)=0,5$.

***

8.6.1.(прототип77382) Решите уравнение $\log_{x-5}49=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.6.2.(105705) Решите уравнение $\log_{x+7}25=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.6.3.(105763) Решите уравнение $\log_{x+4}8=3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.6.4.(105821) Решите уравнение $\log_{x-6}16=4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.6.5.(105819) Решите уравнение $\log_{x-7}32=5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

<u>Использование свойства монотонности логарифмической функции</u>

В силу монотонности логарифмической функции $y=\log_a t$, где $a>0; a\neq 1$, уравнение вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ на множестве, где $f(x)>0$ и $g(x)>0$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Краткая запись

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$$

или

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}$$

Пример 24. Решите уравнения:

а) $\log_3(3x-2)=\log_3(x+16)$;

б) $\lg\left(x^2-3x+1\right)=\lg(2x-5)$;

в) $\log_3 x+\log_3 4=\log_3 20$.

Решение. **а)** Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-2=x+16,\\ x+16>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=18,\\ x>-16.\end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

б) Имеем $\lg\left(x^2-3x+1\right)=\lg(2x-5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=2x-5,\\ 2x-5>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0,\\ x>2,5.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=3\end{array}\right.\\ x>2,5.\end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

в) Исходное уравнение равносильно уравнению $\log_3 4x=\log_3 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=20 \Leftrightarrow x=5.$

***

8.7.1.(прототип 26649) Найдите корень уравнения: $\log_2(15+x)=\log_2 3$.

8.7.2.(2687) Найдите корень уравнения: $\log_7(9+x)=\log_7 2$.

8.7.3.(38221) Найдите корень уравнения: $\log_6(6+x)=\log_6 8$.

8.7.4.(38229) Найдите корень уравнения: $\log_8(12+x)=\log_8 18$.

8.7.5.(38233) Найдите корень уравнения: $\log_5(13+x)=\log_5 8$.

***

8.8.1.(прототип 26648) Найдите корень уравнения: $\log_5(5-x)=\log_5 3$.

8.8.2.(2689) Найдите корень уравнения: $\log_3(14-x)=\log_3 5$.

8.8.3.(2691) Найдите корень уравнения: $\log_{13}(17-x)=\log_{13}12$.

8.8.4.(38141) Найдите корень уравнения: $\log_2(2-x)=\log_2 1$.

8.8.5.(38181) Найдите корень уравнения: $\log_9(7-x)=\log_9 2$.

***

8.9.1.(прототип 26657) Найдите корень уравнения: $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$.

8.9.2.(3143) Найдите корень уравнения: $\log_3(x+4)=\log_3(2x-12)$.

8.9.3.(3145) Найдите корень уравнения: $\log_9(x+6)=\log_9(4x-9)$.

8.9.4.(3149) Найдите корень уравнения: $\log_7(x+9)=\log_7(5x-7)$.

8.9.5.(3181) Найдите корень уравнения: $\log_5(x+3)=\log_5(6x-17)$.

***

8.10.1.(прототип 77380) Решите уравнение $\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10)$.

8.10.2.(104709) Решите уравнение $\log_4(x^2-4x)=\log_4(x^2+3)$.

8.10.3.(104805) Решите уравнение $\log_8(x^2+5x)=\log_8(x^2+2)$.

8.10.4.(104995) Решите уравнение $\log_6(x^2+x)=\log_6(x^2-10)$.

8.10.5.(105049) Решите уравнение $\log_6(x^2+4x)=\log_6(x^2+10)$.

***

8.11.1.(прототип 26659) Найдите корень уравнения: $\log_5(5-x)=2\log_5 3$.

8.11.2.(3237) Найдите корень уравнения: $\log_2(4-x)=2\log_2 5$.

8.11.3.(3241) Найдите корень уравнения: $\log_2(18-6x)=4\log_2 3$.

8.11.4.(3243) Найдите корень уравнения: $\log_2(11-x)=4\log_2 5$.

8.11.5.(3259) Найдите корень уравнения: $\log_2(12-6x)=3\log_2 3$.

***

8.12.1.(прототип 77381) Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

8.12.2.(105205) Решите уравнение $\log_2(4+x)=\log_2(2-x)+2$.

8.12.3.(105303) Решите уравнение $\log_3(4+5x)=\log_3(3-5x)+1$.

8.12.4.(105527) Решите уравнение $\log_5(4+5x)=\log_5(1-4x)+2$.

8.12.5.(105689) Решите уравнение $\log_4(6+5x)=\log_4(3+x)+1$.

<u>Применение формул</u>

***

8.13.1. Решите уравнение

$$7\cdot 5^{\log_5 x}=x^2+6.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.13.2. Решите уравнение $3^{\log_3(x^2-2)}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.13.3. Решите уравнение

$$2\cdot 13^{\log_{13}x^2}=7x+4.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.13.4. Решите уравнение $3x^2+7^{\log_7 x}=30$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.13.5. Решите уравнение $4^{\log_4(x^2-1)}=3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

***

8.14.1.(прототип 315120) Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4}=4$.

8.14.2.(315441) Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{2x+6}=4$.

8.14.3.(315445) Найдите корень уравнения $\log_{16} 2^{2x-7}=3$.

8.14.4.(315463) Найдите корень уравнения $\log_{27} 3^{4x+8}=2$.

8.14.5. (315495) Найдите корень уравнения $\log_4 2^{5x+7}=4$.

***

8.15.1.(прототип 315121) Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)}=5$.

8.15.2.(315539) Найдите корень уравнения $2^{\log_4(5x+8)}=2$.

8.15.3.(315589) Найдите корень уравнения $2^{\log_8(7x-8)}=3$.

8.15.4.(315613) Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(5x+3)}=6$.

8.15.5.(315621) Найдите корень уравнения $3^{\log_{27}(8x-9)}=7$.

***

8.16.1. Решите уравнение

$$\log_{x+2}(x+2)=x^2-3.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

8.16.2. Решите уравнение

$$\log_{x+2}(x+2)=x^2.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.16.3. Решите уравнение

$$2\log_{x+3}(x+3)=x^2-x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

8.16.4. Решите уравнение

$$3\log_{1-x}(1-x)=x^2+2x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

8.16.5. Решите уравнение

$$5\log_{3-x}(3-x)=2x^2+3x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Использование условия равенства произведения или дроби нулю

Пример 25. Решите уравнения:

а) $(3x^2-2x-1)\cdot\log_3(x-1)=0$;

б) $\dfrac{8+2x-x^2}{\log_{0,5}(x-1)}=0.$

Решение. **а)** Имеем

$$(3x^2-2x-1)\cdot\log_3(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x^2-2x-1=0,\\ \log_3(x-1)=0,\end{array}\right.\\ x-1>0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-\dfrac{1}{3},\\ x=2,\end{array}\right.\\ x>1.\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

б) Получаем

$$\frac{8+2x-x^2}{\log_{0,5}(x-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}8+2x-x^2=0,\\ \log_{0,5}(x-1)\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x>1,\\ x\neq 2.\end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

9. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическими называют уравнения, содержащие неизвестную под знаком тригонометрических функций.

Так как «финальным аккордом» при решении большинства тригонометрических уравнений является решение простейшего тригонометрического уравнения (или совокупности таких уравнений), все формы записи ответов для простейших тригонометрических уравнений следует знать безукоризненно.

Уравнение $\sin x=a$

Если $|a|>1$, то решений нет.

Если $|a|\le 1$, то общее решение

$$\left[\begin{array}{l}x=\arcsin a+2\pi n,\\ x=\pi-\arcsin a+2\pi n,\end{array}\right. n\in Z$$

или

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z.$$

Частные случаи:

$\sin x=-1$ $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$\sin x=0$ $x=\pi n, n\in Z$

$\sin x=1$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Уравнение $\cos x=a$

Если $|a|>1$, то решений нет.

Если $|a|\le 1$, то общее решение

$$\left[\begin{array}{l}x=\arccos a+2\pi n,\\ x=-\arccos a+2\pi n,\end{array}\right. n\in Z$$

или

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи:

$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 1$ $x = 2\pi n, n \in Z$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Для любого $a \in R$ общеерешение

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи:

$\operatorname{tg} x = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Пример 26. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = 0$; **б)** $\sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. **а)** По формуле

$$2x = \pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

б) Имеем по формуле

$$\pi x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\pi x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{(-1)^n}{4} + n,\ n \in Z.$$

Или по-другому

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ \pi x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ \pi x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} + 2n,\ n \in Z; \\ x = \frac{3}{4} + 2k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

в) Получаем по формуле

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \cdot (-1) \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

Или по-другому

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2n,\ n \in Z; \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Пример 27. Решить уравнения:

а) $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\cos 3x = 1$;

в) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$.

Решение. **а)** По формуле

$$\frac{x}{2} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi n,\ n \in Z.$$

б) По формуле

$$3x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$$

в) По формуле

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Пример 28. Решить уравнения:

а) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; **б)** $\mathrm{tg}\,2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\mathrm{tg}\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$.

Решение. **а)** По формуле

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ x = \pi n,\ n \in Z.$$

б) По формуле

$$2x = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

в) По формуле

$$\frac{x}{3} = \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = -\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = -\pi + 3\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 29. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. По формуле корней находим

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in Z$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in Z.$$

Для первой серии корней имеем:

при $n = 0$ $x = \frac{\pi}{6}$;

при $n = -1$ $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi$ или $x = -\frac{11\pi}{6}$.

Для второй серии корней имеем:

при $n = 0$ $x = \frac{5\pi}{6}$;

при $n = -1$ $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ или $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Из двух отрицательных чисел $-\frac{11\pi}{6}$ и $-\frac{7\pi}{6}$ выбираем наибольшее число.

Ответ: $-\frac{7\pi}{6}$.

***

9.1.1.(прототип 26669) Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.1.2.(13043)Решите уравнение $\cos\frac{4\pi x}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.1.3.(13063)Решите уравнение $\cos\frac{\pi(2x-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.1.4.(13203)Решите уравнение $\cos\frac{2\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.1.5.(13373)Решите уравнение $\cos\frac{\pi(8x+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.1.6.(13379)Решите уравнение $\cos\frac{4\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

***

9.2.1.(прототип 77376) Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.2.2.(103025) Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x+2)}{3}=-\sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.2.3.(103033) Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(2x-1)}{3}=\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.2.4.(103461) Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x-6)}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.2.5.(103027) Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x+4)}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

***

9.3.1.(прототип 77377) Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0{,}5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.3.2.(103525) Решите уравнение $\sin\frac{\pi(4x-3)}{4}=1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.3.3.(104007) Решите уравнение $\sin\frac{\pi(4x+1)}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.3.4.(103725) Решите уравнение $\sin\frac{\pi(8x+5)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.3.5.(104023) Решите уравнение $\sin\frac{\pi(2x-3)}{6}=-0{,}5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

10. Дополнительные задачи

Решите уравнения (**1-3**):

1. $\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}-x=1+\frac{x-3}{6}$.

2. $5x+(x-1)^2=(x+2)(x-2)+3x+5$.

3. $(x-3)(x+4)=0$.

4. Для каждого значения a решите уравнение $(a+1)(a-1)\cdot x=a+1$.

Решите уравнения (**5-10**):

5. $x^2-(\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}=0$.

6. $\left(\sqrt{5x}\right)^2=25$.

7. $x^2=\sqrt{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+3}$.

8. $x^2=\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

9. $x^2=\left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

10.

$$(x-0{,}123456789)^2+(x-1{,}123456789)^2+$$
$$+(x-8{,}123456789)^2=65.$$

11. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$.

12. При каких значениях p уравнение $3x^2+px+12=0$ имеет два различных действительных корня?

13. При каких значениях b уравнения $2x+7=3$ и $x^2-(2b-1)x-2=0$ имеют общий корень?

14. Один из корней уравнения $x^2+ax-12=0$ равен 2. Найдите второй корень и коэффициент a.

15. При каком значении a корни уравнения $x^2+(a-2)x+a-6=0$ являются противоположными числами?

16. Один из корней уравнения $2x^2-3x+k=0$ в два раза больше другого. Найдите корни уравнения и коэффициент k.

17. Для каждого значения a решите уравнение $x^2-(4a+1)x+4a=0$.

Решите уравнения (**18-22**):

18. $\frac{(x-1)(x+2)}{x+2}=0$.

19. $4x+\frac{3}{x}=\frac{4x+3}{x}$.

20. $(x-5)(x+7)=\frac{x-5}{x+7}$.

21. $\frac{2x-3}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{4x-6}{x^2+2x}$.

22. $\frac{x^2-12}{x-3}=\frac{x}{3-x}$.

23. При каком значении x значение функции $y=\frac{3x+2}{x-1}$ равно 8?

24. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\frac{x-8}{x-20}$ и $y=\frac{1}{x}$.

25. Найдите координаты точек пересечения с осью абсцисс графика функции $y=\frac{x^3-3x^2+2x}{x-1}$.

26. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-8x+15}{x-a}=0$ будет иметь один корень?

Решите уравнения (**27-42**):

27. $x^6=(3x-2)^3$.

28. $x^4=(3x-2)^2$.

29. $||x|-4|=2$.

30. $|x|=x+2$.

31. $\sqrt{-2-x}\cdot\sqrt{3-2x}=3$.

32. $\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{\sqrt{-7x}}=0$.

33. $\sqrt{10+\sqrt{x-5}}=3$.

34. $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$.

35. $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

36. $\left(x^2+5x\right)\cdot\sqrt{x-3}=0$.

37. $5^{|x|}=25$.

38. $3^x=7$.

39. $\frac{3^{x^2}-81}{x-2}=0$.

40. $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{2x}=\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x-6}$.

41. $\log_7(15-x)=\log_9(15-x)$.

42. $\log_2 x=-x-0,5$.

43. Решите уравнение

$$\sin\pi x\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\cos\pi x\cdot\sin\frac{\pi}{3}.$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение заданий-прототипов

1. Линейные уравнения

1.1.1. *Решение.* Из уравнения $\frac{4}{7}x=7\frac{3}{7}$ получаем $x=\frac{52}{7}:\frac{4}{7}$ или $x=13$.

Ответ: 13.

1.2.1. *Решение.* Из уравнения $-\frac{2}{9}x=1\frac{1}{9}$ получаем $x=\frac{10}{9}:\left(-\frac{2}{9}\right)$ или $x=-5$.

Ответ: –5.

2. Квадратные уравнения

2.1.1. *Решение.* Данное уравнение $\frac{1}{3}x^2=16\frac{1}{3}$ приведем к виду $x^2=\frac{49}{3}:\frac{1}{3}$ или $x^2=49$. Последнее уравнение имеет два корня 7 или –7. Выбираем наименьший корень –7.

Ответ: –7.

2.2.1. *Решение.* Для уравнения $x^2-17x+72=0$ вычислим дискриминант $D=17^2-4\cdot1\cdot72=1$. Из двух корней $\frac{17-1}{2}=8$ и $\frac{17+1}{2}=9$ выбираем меньший 8.

Ответ: 8.

2.3.1. *Решение.* Преобразуем данное уравнение $(x-6)^2=-24x$:

$$x^2-12x+36+24x=0;$$
$$x^2+12x+36=0;$$
$$(x+6)^2=0;$$
$$x+6=0;$$
$$x=-6.$$

Ответ: –6.

2.4.1. *Решение.* Преобразуем данное уравнение $x^2+9=(x+9)^2$:

$$x^2+9=x^2+18x+81;$$
$$18x=9-81;$$
$$18x=-72;$$
$$x=-4.$$

Ответ: –4.

2.5.1. *Решение.* Преобразуем данное уравнение, используя формулы квадрата суммы и квадрата разности

$$(2x+7)^2=(2x-1)^2:$$
$$4x^2+28x+49=4x^2-4x+1;$$
$$32x=-48;$$
$$x=-1{,}5.$$

Замечание. Другой способ решения связан с применением формулы разности квадратов:

$$(2x+7)^2-(2x-1)^2=0;$$
$$(2x+7+2x-1)(2x+7-2x+1)=0;$$
$$(4x+6)\cdot8=0;$$
$$4x+6=0;$$
$$x=-1{,}5.$$

Ответ: –1,5.

3. Уравнения высшей степени

3.1.1. *Решение.* Уравнение $(x-1)^3=8$ приведем к виду $(x-1)^3=2^3$. Отсюда имеем $x-1=2$ или $x=3$.

Ответ: 3.

3.2.1. *Решение.* Уравнение $(x-1)^3=-8$ приведем к виду $(x-1)^3=(-2)^3$. Отсюда имеем $x-1=-2$ или $x=-1$.

Ответ: –1.

3.3.1. *Решение.* Имеем

$$(x-1)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2,\\x-1=-2.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\x=-1.\end{array}\right.$$

Выбираем больший корень.

Ответ: 3.

4. Дробно-рациональные уравнения

4.1.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{1}{9x-7}=\frac{1}{2}$ на $2(9x-7)\neq0$. Имеем $2=9x-7$; $-9x=-9$; $x=1$. Условие $2(9x-7)\neq0$ при $x=1$ выполняется.

Ответ: 1.

4.2.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{1}{4x-1}=5$ на $4x-1\neq0$. Отсюда получаем $1=5(4x-1)$; $4x-1=0{,}2$; $4x=1{,}2$; $x=0{,}3$. Условие $4x-1\neq0$ при $x=0{,}3$ выполняется.

Ответ: 0,3.

4.3.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{x-119}{x+7}=-5$ на $x+7\neq 0$. Имеем $x-119=-5x-35$; $6x=84$; $x=14$. Условие $x+7\neq 0$ при $x=14$ выполняется.

Ответ: 14.

4.4.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения на $(3x-4)(4x-11)\neq 0$. Получим

$$4x-11=3x-4 \Leftrightarrow x=7.$$

Условия $3x-4\neq 0$ и $4x-11\neq 0$ выполняются при $x=7$.

Ответ: 7.

4.5.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{9}{x^2-16}=1$ на $x^2-16\neq 0$. Имеем $9=x^2-16$; $x^2=25$; $x=\pm 5$. Условие $x^2-16\neq 0$ при $x=\pm 5$ выполняется. Выбираем больший корень 5.

Ответ: 5.

4.6.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{13x}{2x^2-7}=1$ на $2x^2-7\neq 0$. Имеем $13x=2x^2-7$; $2x^2-13x-7=0$. Оба корня последнего уравнения –0,5 и 7 удовлетворяют условию $2x^2-7\neq 0$. Выбираем меньший корень –0,5.

Ответ: –0,5.

4.7.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $x=\frac{6x-15}{x-2}$ на $x-2\neq 0$. Имеем $x^2-2x=6x-15$; $x^2-8x+15=0$. Оба корня последнего уравнения 3 и 5 удовлетворяют условию $x-2\neq 0$. Выбираем больший корень 5.

Ответ: 5.

4.8.1. *Решение.* Умножим обе части уравнения $\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}$ на $(5x+7)(7x+5)\neq 0$. Имеем

$$(x+8)(7x+5)=(x+8)(5x+7);$$

$$(x+8)(7x+5-5x-7)=0;$$

$$(x+8)(2x-2)=0.$$

Отсюда $x=-8$ или $x=1$. Оба корня последнего уравнения удовлетворяют условию $(5x+7)(7x+5)\neq 0$. Выбираем больший корень 1.

Ответ: 1.

5. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

5.1.1. *Решение.* По определению модуля имеем $2x-3=11$ или $2x-3=-11$. Отсюда $x=7$ или $x=-4$. Выбираем больший корень.

Ответ: 7.

5.2.1. *Решение.* Имеем

$$|x+1|=|2-x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2-x, \\ x+1=x-2. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

5.3.1. *Решение.* Имеем

$$|3-6x|=4-2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3-6x=4-2x, \\ 3-6x=2x-4, \end{array}\right. \\ 4-2x\geq 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3-6x=4-2x, \\ 3-6x=2x-4, \end{array}\right. \\ 4-2x\geq 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-0{,}25, \\ x=0{,}875, \end{array}\right. \\ x\leq 2. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0{,}25, \\ x=0{,}875. \end{array}\right.$$

Выбираем наименьший корень.

Ответ: –0,25.

6. Иррациональные уравнения

6.1.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{3x-8}=5$ равносильно уравнению $3x-8=25$. Далее получаем $3x=33$ или $x=11$.

Ответ: 11.

6.2.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{15-2x}=3$ равносильно уравнению $15-2x=9$. Далее получаем $-2x=-6$ или $x=3$.

Ответ: 3.

6.3.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt[3]{x-4}=3$ равносильно уравнению $x-4=27$. Далее получаем $x=31$.

Ответ: 31.

6.4.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{\frac{2x+5}{3}}=5$ равносильно уравнению $\frac{2x+5}{3}=25$. Умножим обе части последнего уравнения на 3. Имеем $2x+5=75$; $2x=70$; $x=35$.

Ответ: 35.

6.5.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$ равносильно уравнению $\frac{6}{4x-54}=\frac{1}{49}$. Умножим обе части последнего уравнения на $49(4x-54)\neq 0$. Имеем $294=4x-54$; $4x=348$; $x=87$.
Ответ: 87.

6.6.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}$ равносильно уравнению $\frac{1}{5-2x}=\frac{1}{9}$. Умножим обе части последнего уравнения на $9(5-2x)\neq 0$. Имеем $9=5-2x$; $2x=-4$; $x=-2$.
Ответ: –2.

6.7.1. *Решение.* Уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=\frac{1}{5}$ равносильно уравнению $\frac{1}{15-4x}=\frac{1}{25}$. Умножим обе части последнего уравнения на $25(15-4x)\neq 0$. Имеем $25=15-4x$; $4x=-10$; $x=-2,5$.
Ответ: –2,5.

6.8.1. *Решение.* Данное уравнение $\sqrt{6+5x}=x$ равносильно системе $\begin{cases}6+5x=x^2,\\ x\geq 0.\end{cases}$ Квадратное уравнение $x^2-5x-6=0$ имеет корни –1 и 6, последний из которых удовлетворяет условию $x\geq 0$.
Ответ: 6.

6.9.1. *Решение.* Данное уравнение $\sqrt{-72-17x}=-x$ равносильно системе

$$\begin{cases}-72-17x=x^2,\\ -x\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+17x+72=0,\\ x\leq 0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение системы имеет корни –9 и –8, которые удовлетворяют условию $x\leq 0$. Выбираем меньший корень.
Ответ: –9.

6.10.1. *Решение.* Получаем

$$\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+1=x-4,\\ x-4\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+5=0,\\ x\geq 4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x\geq 4.\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

6.11.1. *Решение.* Имеем

$$\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{2x+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-1=0,\\ 2x+1=0,\end{array}\right.\\ 2x+1\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm 1,\\ x=-0,5,\end{array}\right.\\ 2x+1\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-0,5.\end{array}\right.$$

Из двух корней выбираем меньший.
Ответ: –0,5.

7. Показательные уравнения

7.1.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$9^{-5+x}=729\Leftrightarrow 9^{-5+x}=9^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5+x=3\Leftrightarrow x=8.$$

Ответ: 8.

7.2.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$2^{4-2x}=64\Leftrightarrow 2^{4-2x}=2^6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4-2x=6\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: –1.

7.3.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$8^{9-x}=64^x\Leftrightarrow 8^{9-x}=8^{2x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9-x=2x\Leftrightarrow -3x=-9\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

7.4.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-8=2\Leftrightarrow x=10.$$

Ответ: 10.

7.5.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$5^{x-7}=\frac{1}{125}\Leftrightarrow 5^{x-7}=5^{-3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-7=-3\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

***

7.6.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$5^{x+5}=0,04\Leftrightarrow 5^{x+5}=\frac{1}{25}\Leftrightarrow 5^{x+5}=5^{-2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+5=-2\Leftrightarrow x=-7.$$

Ответ: –7.

7.7.1.*Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x}=512\Leftrightarrow\left(8^{-1}\right)^{-3+x}=8^3\Leftrightarrow 8^{3-x}=8^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x=3\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

7.8.1.*Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x}=4\Leftrightarrow\left(2^{-1}\right)^{6-2x}=2^2\Leftrightarrow 2^{-6+2x}=2^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6+2x=2\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

7.9.1. *Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}=2^x\Leftrightarrow\left(2^{-1}\right)^{x-8}=2^x\Leftrightarrow 2^{-x+8}=2^x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x+8=x\Leftrightarrow -2x=-8\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

7.10.1.*Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3\Leftrightarrow\left(3^{-2}\right)^{x-13}=3\Leftrightarrow 2^{-2x+26}=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x+26=1\Leftrightarrow -2x=-25\Leftrightarrow x=12,5.$$

Ответ:12,5.

7.11.1.*Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$16^{x-9}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(2^4\right)^{x-9}=2^{-1}\Leftrightarrow 2^{4x-36}=2^{-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x-36=-1\Leftrightarrow 4x=35\Leftrightarrow x=8,75.$$

Ответ: 8,75.

7.12.1.*Решение.* Используем равносильные преобразования:

$$2^{3+x}=0,4\cdot 5^{3+x}\Leftrightarrow\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0,4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,4^{3+x}=0,4\Leftrightarrow 3+x=1\Leftrightarrow x=-2$$

Ответ: –2.

8. Логарифмические уравнения

Использование определения логарифма

8.1.1.*Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_5(4+x)=2$ получаем $4+x=5^2$ (выполняется условие $4+x>0$). Далее находим $x=25-4$ или $x=21$.

Ответ: 21.

8.2.1. *Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_2(4-x)=7$ получаем $4-x=2^7$ (выполняется условие $4-x>0$). Далее находим $-x=128-4$ или $x=-124$.

Ответ: –124.

8.3.1. *Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$ получаем $7-x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$ (выполняется условие $7-x>0$). Далее находим $-x=49-7$ или $x=-42$.

Ответ: –42.

8.4.1. *Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_2(5-x)=-3$ получаем $5-x=2^{-3}$(выполняется условие $5-x>0$). Далее находим $-x=0,125-5$ или $x=4,875$.

Ответ: 4,875.

8.5.1. *Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_{25}(2-3x)=0,5$ получаем $2-3x=25^{0,5}$ (выполняется условие $2-3x>0$). Далее находим $2-3x=5$; $-3x=3$; $x=-1$.

Ответ: –1.

8.6.1. *Решение.* По определению логарифма из уравнения $\log_{x-5}49=2$ получаем $(x-5)^2=49$. Далее имеем два уравнения $x-5=7$ или $x-5=-7$. Так как для основания логарифма должны выполняться условия $\begin{cases}x-5>0,\\ x-5\neq 1,\end{cases}$ то решаем первое уравнение и находим $x=12$.

Ответ: 12.

Использование свойства монотонности логарифмической функции

8.7.1. *Решение*. Имеем
$\log_2(15+x)=\log_2 3 \Leftrightarrow 15+x=3 \Leftrightarrow x=-12.$

Ответ: –12.

8.8.1.*Решение*. Имеем

$$\log_5(5-x)=\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

8.9.1.*Решение*. Имеем

$$\log_4(x+3)=\log_4(4x-15) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4x-15, \\ x+3>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-18, \\ x>-3. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x>-3. \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

8.10.1. *Решение*. Имеем

$$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=x^2+10, \\ x^2+10>0. \end{cases} \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

8.11.1. *Решение*. Имеем

$$\log_5(5-x)=2\log_5 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_5(5-x)=\log_5 3^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5-x=9 \Leftrightarrow -x=4 \Leftrightarrow x=-4.$$

Ответ: –4.

8.12.1. *Решение*. Имеем

$$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_5(7-x)=\log_5(15-5x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x=15-5x, \\ 7-x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=8, \\ 7-x>0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ 7-2>0. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Применение формул

8.13.1.*Решение*. Имеем

$$7\cdot 5^{\log_5 x}=x^2+6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x=x^2+6, \\ x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Выбираем меньший корень.

Ответ: 1.

8.14.1. *Решение*.По определению логарифма имеем $2^{8x-4}=8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4}=2^{12} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x-4=12 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: 2.

8.15.1.*Решение*.Имеем $3^{\log_9(5x-5)}=5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3\sqrt{5x-5}}=5 \Leftrightarrow \sqrt{5x-5}=5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x-5=25 \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

8.16.1.*Решение*. Имеем

$$\log_{x+2}(x+2)=x^2-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=x^2-3, \\ x+2>0, \\ x+2\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2, \\ x>-2 \\ x\neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

9. Тригонометрические уравнения

9.1.1. *Решение*. По формуле корней находим

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(x-7)}{3}=\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi n, \\ \dfrac{\pi(x-7)}{3}=-\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi n, \end{array}\right. n\in Z;$$
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(x-7)}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \\ \dfrac{\pi(x-7)}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \end{array}\right. n\in Z;$$
$$\left[\begin{array}{l} x-7=1+6n, \\ x-7=-1+6n, \end{array}\right. n\in Z;$$
$$\left[\begin{array}{l} x=8+6n, \\ x=6+6n, \end{array}\right. n\in Z.$$

Для первой серии корней имеем:
при $n=-1$ $x=2$;
при $n=-2$ $x=-4$.

Для второй серии корней имеем:
при $n=-1$ $x=0$;
при $n=-2$ $x=-6$.

Из двух отрицательных чисел –4 и –6 выбираем наибольшее число.

Ответ: –4.

9.2.1. *Решение*. По формуле корней находим

$$\frac{\pi x}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$$

$$x=-1+4n, n\in Z.$$

Для серии корней имеем:
при $n=1$ $x=3$;
при $n=0$ $x=-1$.

Значит, наибольший отрицательный корень равен –1.
Ответ: –1.

9.3.1. *Решение*. Из уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5$ имеем

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\arcsin\frac{1}{2}+2\pi n,\\ \frac{\pi x}{3}=\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2\pi n,\end{array}\right. n\in Z;$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right. n\in Z;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}+6n,\\ x=\frac{5}{2}+6n,\end{array}\right. n\in Z.$$

Для первой серии корней имеем:
при $n=-1$ $x=-\frac{11}{2}$;
при $n=0$ $x=\frac{1}{2}$.

Для второй серии корней имеем:
при $n=-1$ $x=-\frac{7}{2}$;
при $n=0$ $x=\frac{5}{2}$.

Из двух положительных чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{2}$ выбираем наименьшее число.
Ответ: 0,5.

Ответы

1. Линейные уравнения

***

1.1.1. 13. **1.1.2.** 28. **1.1.3.** 12.**1.1.4.** 6. **1.1.5.**5.

***

1.2.1. –5. **1.2.2.** –9. **1.2.3.** –22. **1.2.4.** –20. **1.2.5.** –23.

2. Квадратные уравнения

***

2.1.1. –7. **2.1.2.** 4,5. **2.1.3.** 14.**2.1.4.** –6,5. **2.1.5.**–6,5.

***

2.2.1. 8. **2.2.2.** 4. **2.2.3.** –2.**2.2.4.** 0. **2.2.5.** 6,5. **2.2.6.** –4,5. **2.2.7.** 1,5.

***

2.3.1. –6. **2.3.2.** 12. **2.3.3.** –13.**2.3.4.** 5. **2.3.5.** –14.

***

2.4.1. –4. **2.4.2.** 3. **2.4.3.** –5.**2.4.4.**–1. **2.4.5.** 4.

***

2.5.1. –1,5. **2.5.2.** 1,5. **2.5.3.** 1. **2.5.4.** –0,5. **2.5.5.**–2.

3. Уравнения высшей степени

***

3.1.1. 3. **3.1.2.**–5. **3.1.3.**–1.**3.1.4.**–3. **3.1.5.** 6.

***

3.2.1. –1. **3.2.2.**–5. **3.2.3.** 3.**3.2.4.**–7. **3.2.5.** –8.

***

3.3.1.3. **3.3.2.**–8. **3.3.3.**5. **3.3.4.**–9. **3.3.5.**3.

4. Дробно-рациональные уравнения

***

4.1.1.1.**4.1.2.** 2. **4.1.3.** 5.**4.1.4.**1,2. **4.1.5.** 6,5.

***

4.2.1. 0,3. **4.2.2.** –0,99. **4.2.3.** –0,55. **4.2.4.** –7,75.**4.2.5.** 3,05.

***

4.3.1. 14. **4.3.2.** –13. **4.3.3.** –1.**4.3.4.** –15. **4.3.5.** –5.

***

4.4.1. 7. **4.4.2.** 34. **4.4.3.** –27.**4.4.4.** –1,6. **4.4.5.** 2,5.

***

4.5.1. 5. **4.5.2.** –4. **4.5.3.** –2.**4.5.4.** 3. **4.5.5.** –3.

***

4.6.1.–0,5. **4.6.2.**24. **4.6.3.**1.**4.6.4.**–4. **4.6.5.** 12.

***

4.7.1. 5. **4.7.2.** –9. **4.7.3.**–4.**4.7.4.**1. **4.7.5.** –5.

***

4.8.1. 1. **4.8.2.** 5. **4.8.3.** 3. **4.8.4.** –6. **4.8.5.** –4.

5. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

***

5.1.1.7. **5.1.2.**5. **5.1.3.** –0,5. **5.1.4.** –1. **5.1.5.** 4.

***

5.2.1.0,5. **5.2.2.**3. **5.2.3.**–9. **5.2.4.**2. **5.2.5.**7.

***

5.3.1.–0,25. **5.3.2.**1,5. **5.3.3.**4. **5.3.4.**1. **5.3.5.**2,5.

6. Иррациональные уравнения

***

6.1.1. 11. **6.1.2.** 4. **6.1.3.** 56.**6.1.4.** –2. **6.1.5.**–1.

***

6.2.1.3. **6.2.2.** 2. **6.2.3.**2.**6.2.4.** –6. **6.2.5.**–7.

***

6.3.1.31. **6.3.2.** –29. **6.3.3.** 133.**6.3.4.**338. **6.3.5.** 226.

***

6.4.1. 35. **6.4.2.** 122. **6.4.3.** 58.**6.4.4.** 582. **6.4.5.** 38.

***

6.5.1.87. **6.5.2.** 21. **6.5.3.** 9.**6.5.4.** 602. **6.5.5.**31.

***

6.6.1. –2. **6.6.2.** –80. **6.6.3.** –767.**6.6.4.** –87. **6.6.5.** –7.

***

6.7.1. –2,5. **6.7.2.**–14. **6.7.3.** 19. **6.7.4.** –483. **6.7.5.**–28.

***

6.8.1. 6. **6.8.2.** 5. **6.8.3.** 6.**6.8.4.** 9. **6.8.5.**1.

***

6.9.1. –9. **6.9.2.**–9. **6.9.3.** –8.**6.9.4.** –9. **6.9.5.**–4.

***

6.10.1.5. **6.10.2.**2. **6.10.3.**0,5. **6.10.4.**0,5. **6.10.5.**6.

***

6.11.1.–0,5. **6.11.2.**3. **6.11.3.**3. **6.11.4.**2. **6.11.5.**1.

7. Показательные уравнения

***

7.1.1.8. **7.1.2.**2. **7.1.3.**8.**7.1.4.** –2. **7.1.5.**4.

***

7.2.1. –1. **7.2.2.**–5. **7.2.3.**–7.**7.2.4.**–1. **7.2.5.**–1.

***

7.3.1.3. **7.3.2.** 2. **7.3.3.**1,25.**7.3.4.**0,6. **7.3.5.**1.

***

7.4.1.10. **7.4.2.**18. **7.4.3.**5. **7.4.4.**2. **7.4.5.**1.

***

7.5.1.4. **7.5.2.**16. **7.5.3.** 2.**7.5.4.**4. **7.5.5.** 4.

***

7.6.1. –7. **7.6.2.** 1. **7.6.3.** –5. **7.6.4.** 7. **7.6.5.**4.

***

7.7.1.0. **7.7.2.** –5. **7.7.3.** 1.**7.7.4.**–1. **7.7.5**–5.

***

7.8.1.4. **7.8.2.**5. **7.8.3.**3.**7.8.4.** 14. **7.8.5.**–2.

***

7.9.1. 4. **7.9.2.** 1. **7.9.3.** 1.**7.9.4.** 1,5. **7.9.5.** –1,25.

***

7.10.1.12,5. **7.10.2.** 5,8. **7.10.3.**8,5. **7.10.4.** 7,5. **7.10.5.** 0,5.

***

7.11.1.8,75. **7.11.2.** 14,5. **7.11.3.** 1,5. **7.11.4.**6,5. **7.11.5.** 3,5.

***

7.12.1.–2. **7.12.2.** 0,2. **7.12.3.** 0.**7.12.4.**2. **7.12.5.** 1.

8. Логарифмические уравнения

<u>Использование определения логарифма</u>

***

8.1.1.21. **8.1.2.** 72. **8.1.3.**7.**8.1.4.**211. **8.1.5.** 733.

***

8.2.1. –124. **8.2.2.** –33. **8.2.3.** –344. **8.2.4.** –7. **8.2.5.** –20.

***

8.3.1. –42. **8.3.2.** –51. **8.3.3.** –11. **8.3.4.** –15. **8.3.5.** –26.

***

8.4.1. 4,875. **8.4.2.** 9,96. **8.4.3.** 7,9375. **8.4.4.** 5,96. **8.4.5.** 1,999.

***

8.5.1. –1.**8.5.2.** –3,5. **8.5.3.** 246. **8.5.4.** 5,875. **8.5.5.** 0,7.

***

8.6.1. 12. **8.6.2.** –2. **8.6.3.** –2. **8.6.4.** 8. **8.6.5.** 9.

<u>Использование свойства монотонности логарифмической функции</u>

***

8.7.1. –12. **8.7.2.** –7. **8.7.3.** 2.**8.7.4.**6. **8.7.5.** –5.

***

8.8.1.2. **8.8.2.**9. **8.8.3.**5.**8.8.4.**1. **8.8.5.**5.

***

8.9.1.6. **8.9.2.** 16. **8.9.3.**5.**8.9.4.**4. **8.9.5.**4.

***

8.10.1. 5. **8.10.2.** –0,75. **8.10.3.**0,4. **8.10.4.**–10. **8.10.5.**2,5.

***

8.11.1. –4. **8.11.2.** –21. **8.11.3.** –10,5. **8.11.4.** –614. **8.11.5.**–2,5.

***

8.12.1. 2. **8.12.2.** 0,8. **8.12.3.** 0,25. **8.12.4.** 0,2. **8.12.5.** 6.

Применение формул

***

8.13.1.1. **8.13.2.**–2. **8.13.3.**–0,5. **8.13.4.**3. **8.13.5.**–2.

***

8.14.1.2. **8.14.2.**5. **8.14.3.**9,5. **8.14.4.**–0,5. **8.14.5.**0,2.

***

8.15.1.6. **8.15.2.**–0,8. **8.15.3.**5. **8.15.4.**258,6. **8.15.5.**44.

***

8.16.1.2. **8.16.2.**1. **8.16.3.**–1. **8.16.4.**–3. **8.16.5.**–2,5.

9. Тригонометрические уравнения

***

9.1.1. –4. **9.1.2.** –0,25. **9.1.3.** –3. **9.1.4.** –0,5. **9.1.5.** –0,25. **9.1.6.** –0,25.

***

9.2.1. –1. **9.2.2.** –3. **9.2.3.** 1.**9.2.4.** 5. **9.2.5.**–3.

***

9.3.1. 0,5. **9.3.2.** –0,75. **9.3.3.** 1,75. **9.3.4.** –0,25. **9.3.5.** 1.

10. Дополнительные задачи

1. Нет решений. **2.** $x \in R$. **3.** –4; 3. **4.** При $a=-1$ любое действительное число; при $a=1$ нет решений; при $a \neq -1$ и $a \neq 1$ единственный корень $x=\frac{1}{a-1}$.
5. $2; \sqrt{3}$. **6.** $\pm\sqrt{5}$. **7.** ± 1. **8.** ± 2. **9.** ± 1.
10. 0,123456789; 6,123456789.
11. $x^2-4x+1=0$.
12. $(-\infty;-12)\cup(12;+\infty)$. **13.** 0.
14. $x_2=-6$; $a=4$. **15.** 2.
16. $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$; $k=1$. **17.** При $a=\frac{1}{4}$ $x=1$, при $a\neq\frac{1}{4}$ $x=1$ или $x=4a$.**18.** 1. **19.** 1. **20.** –8; –6; 5. **21.** 2. **22.** –4. **23.** 2.
24. 4; 5. **25.** (0; 0); (2; 0). **26.** 3; 5.
27. 1; 2. **28.** 1; 2; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. **29.** ± 2; ± 6.
30. –1. **31.** –3. **32.** –5. **33.** Нет корней.
34. ± 1. **35.** ± 1. **36.** 3. **37.** ± 2.
38. $\log_3 7$. **39.** -2. **40.** 2. **41.** 14. **42.** 0,5.
43. –0,75.

Список и источники литературы

1. Ершова А.П., Голобородько В.В., Ершова А.С. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 8 класса. – М.: Илекса, 2003, - 160 с.

2. Локшин А.А., Иванова Е.А. Как решить «нерешаемое» квадратное уравнение / «Математика для школьников», – М.: «Школьная пресса», 2013, – № 4. – С. 62–64.

3. Шестаков С. А. ЕГЭ 2013. Математика. Задача B5. Простейшие уравнения. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. –48 с.

4.www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2013 (открытый банк заданий).

5. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

6. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

7.http://reshuege.ru – Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».